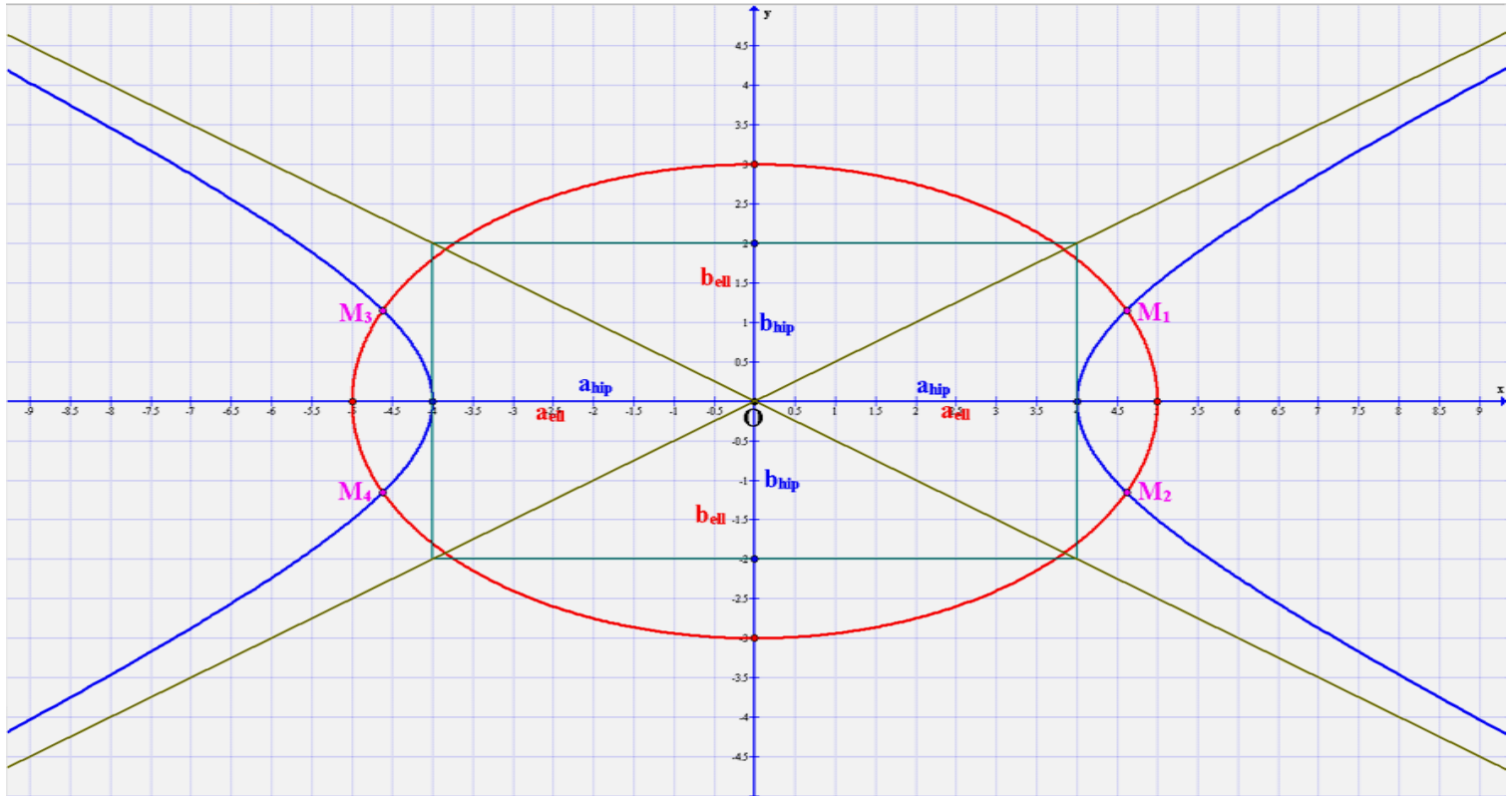


A közös középpontú ellipszis és hiperbola metszéspontjairól

Itt kizárólag a címbeli speciális esettel foglalkozunk, melynél viszonylag egyszerű képleteket írhatunk fel.

Kezdetnek tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Itt a közös O centrumú, eltérő a és b paraméterekkel bíró piros ellipszist és a kék hiperbolát rajzoltuk meg. A két görbe 4 darab M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) metszéspontját is berajzoltuk.

Az 1. ábra megadja a hivatkozási alapot, a jelölésekre nézve is. Az itteni adatok esetén:

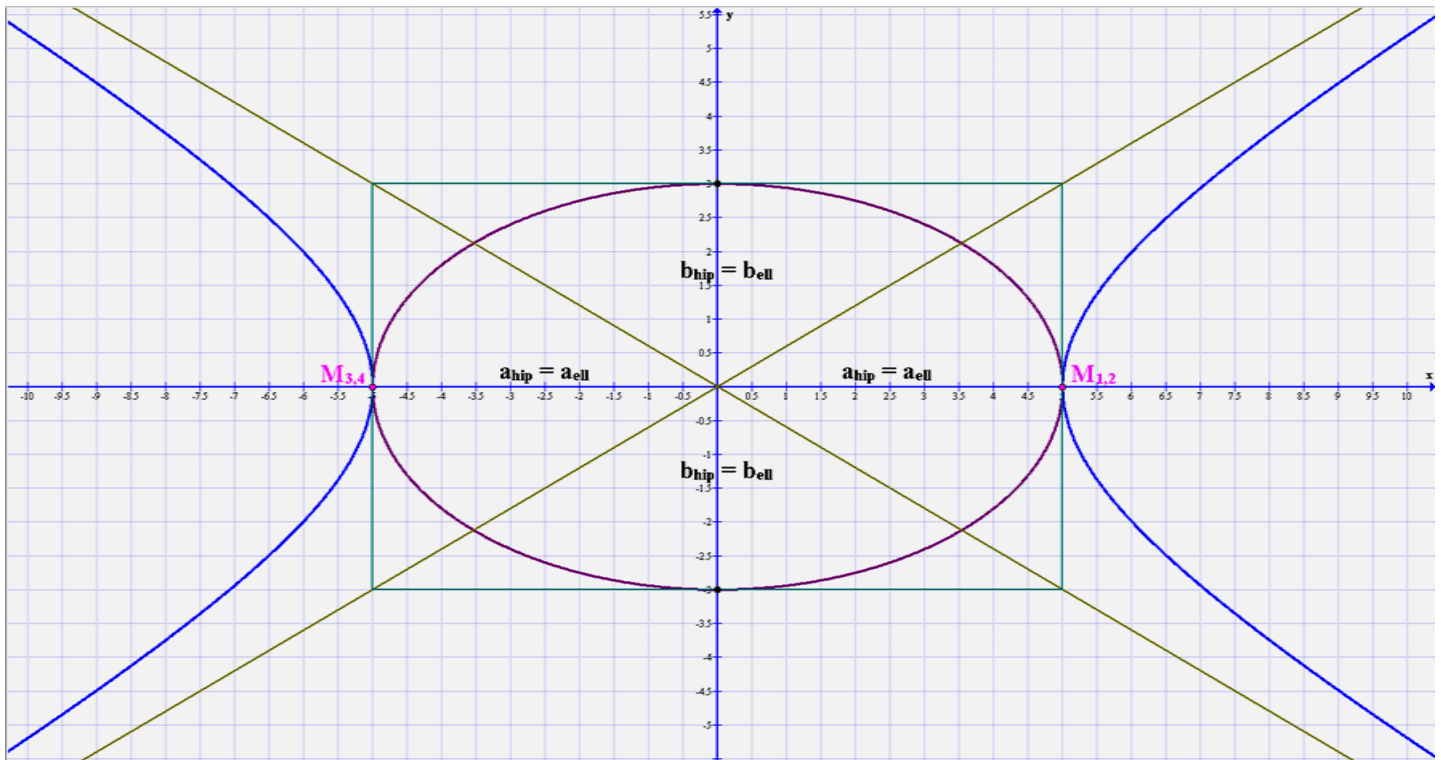
$$a_{ell} > a_{hip} , \quad b_{ell} > b_{hip} . \quad (1)$$

Másodszorra tekintsük a 2. ábrát!

Itt egy olyan esetet ábrázoltunk, melyre:

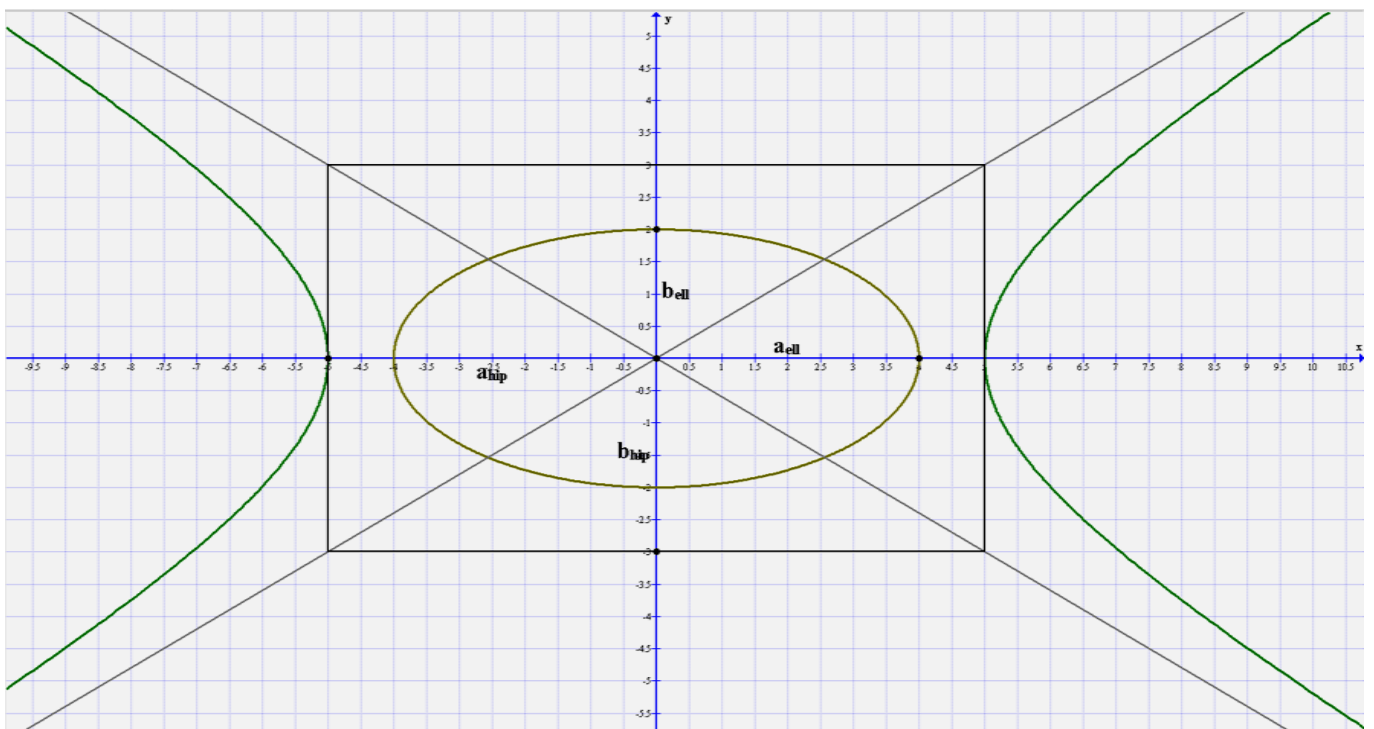
$$a_{ell} = a_{hip} , \quad b_{ell} = b_{hip} . \quad (2)$$

Látjuk, hogy itt az 1. és 2., valamint a 3. és 4. metszéspontok páronként egybeestek. Ezek szerint az ellipszis és a hiperbola itt már csak két közös ponttal bír.



2. ábra

Harmadjára tekintsük a 3. ábrát!



3. ábra

Itt egy olyan esetet ábrázoltunk, melyre:

$$a_{ell} < a_{hip} , b_{ell} < b_{hip} . \quad (3)$$

A 3. ábrán az ellipszis és a hiperbola közös pontjainak száma: **0**.

Látjuk, hogy a közös centrumú ellipszis és hiperbola akkor produkál közös pontokat, ha $a_{ell} \geq a_{hip}$. (!)

A metszéspontok koordinátáinak számítása az alábbiak szerinti.

Kiindulunk az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenletéből:

$$\frac{x^2}{a_{ell}^2} + \frac{y^2}{b_{ell}^2} = 1 , \quad (4)$$

$$\frac{x^2}{a_{hip}^2} - \frac{y^2}{b_{hip}^2} = 1 . \quad (5)$$

Most kifejezzük y^2 - et mindkettőből

$$y^2 = b_{ell}^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a_{ell}^2}\right) , \quad (6 / 1)$$

$$y^2 = b_{hip}^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a_{hip}^2} - 1\right) . \quad (6 / 2)$$

A metszéspontok y - koordinátái egyenlőek, ezért (6) jobb oldalainak egyenlővé tételével:

$$b_{ell}^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a_{ell}^2}\right) = b_{hip}^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a_{hip}^2} - 1\right) \rightarrow b_{ell}^2 - \frac{b_{ell}^2}{a_{ell}^2} \cdot x^2 = \frac{b_{hip}^2}{a_{hip}^2} \cdot x^2 - b_{hip}^2 \rightarrow$$

$$b_{ell}^2 + b_{hip}^2 = x^2 \cdot \left(\frac{b_{hip}^2}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{a_{ell}^2}\right) \rightarrow x^2 = \frac{b_{hip}^2 + b_{ell}^2}{\frac{b_{hip}^2}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{a_{ell}^2}} ; \quad (7 / 1)$$

További átalakításokkal:

$$x^2 = \frac{b_{hip}^2}{b_{hip}^2} \cdot \frac{1 + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}{\frac{1}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2 \cdot a_{ell}^2}} = \frac{1 + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}{\frac{1}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2 \cdot a_{ell}^2}} = \frac{1 + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}{\frac{1}{a_{ell}^2} \cdot \left(\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}\right)} = a_{ell}^2 \cdot \frac{1 + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}{\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}} , \text{ azaz:}$$

$$x^2 = a_{ell}^2 \cdot \frac{1 + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}{\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}} , \quad (7 / 2)$$

innen négyzetgyökvonással:

$$\underline{\underline{x_{1,2} = \pm a_{ell} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}}{\sqrt{\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}}} \quad (8)$$

A (8) képlet adja meg az **M** metszéspontok **x** - koordinátáit.

Folytatva (6 / 1) és (7 / 2) szerint:

$$y_{1,2}^2 = b_{ell}^2 \cdot \left(1 - \frac{x_{1,2}^2}{a_{ell}^2}\right) = b_{ell}^2 \cdot \left(1 - \frac{1 + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}{\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}\right) = b_{ell}^2 \cdot \frac{\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2} - 1 - \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}{\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}} \rightarrow$$

$$y_{1,2}^2 = b_{ell}^2 \cdot \frac{\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} - 1}{\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}, \quad (9)$$

innen négyzetgyökvonással:

$$\underline{\underline{y_{1,2} = \pm b_{ell} \cdot \frac{\sqrt{\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} - 1}}{\sqrt{\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} + \frac{b_{ell}^2}{b_{hip}^2}}}} \quad (10)$$

A (10) képlet adja meg az **M** metszéspontok **y** - koordinátáit.

Minthogy itt a négyzetgyök jele alatt csak nemnegatív szám állhat, így kell, hogy:

$$\frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{a_{ell}^2}{a_{hip}^2} \geq 1 \rightarrow \frac{a_{ell}}{a_{hip}} \geq +1 \rightarrow \underline{a_{ell} \geq a_{hip}}, \quad (11)$$

egyezésben (3) - mal.

Vagyis a szemlélet és a számítás is arra vezetett, hogy a vizsgált esetekben akkor lehet az ellipszis - és a hiperbola - sokaságnak közös pontja, ha teljesül a (11) $\equiv$ (!) feltétel.

Mint láttuk, a közös pontok lehetséges **n** száma: **4, 2, 0**. Részletesebben:

$$\begin{aligned} a_{ell} &> a_{hip} \rightarrow n = 4, \\ a_{ell} &= a_{hip} \rightarrow n = 2, \\ a_{ell} &< a_{hip} \rightarrow n = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

A (12) kapcsolatok fennállása kiolvasható a (8) és (10) képletekből is.

Képleteinket egy számpéldában alkalmazzuk.

SZÁMPÉLDA – 1. ábra

Adott:

$$a_{ell} = 5 \text{ cm} , a_{hip} = 4 \text{ cm} ; b_{ell} = 3 \text{ cm} , b_{hip} = 2 \text{ cm} . \quad (A)$$

Keresett: $x_{1,2} ; y_{1,2}$.

Megoldás:

$$x_{1,2} = \pm a_{ell} \cdot \frac{1 + \left(\frac{b_{ell}}{b_{hip}}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{a_{ell}}{a_{hip}}\right)^2 + \left(\frac{b_{ell}}{b_{hip}}\right)^2}} = \pm 5 \text{ cm} \cdot \frac{1 + \left(\frac{3 \text{ cm}}{2 \text{ cm}}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{5 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}\right)^2 + \left(\frac{3 \text{ cm}}{2 \text{ cm}}\right)^2}} = \pm 4,616435357 \text{ cm} ,$$

$$\underline{\underline{x_{1,2} = \pm 4,616435357 \text{ cm} .}} \quad (a)$$

$$y_{1,2} = \pm b_{ell} \cdot \frac{\left(\frac{a_{ell}}{a_{hip}}\right)^2 - 1}{\sqrt{\left(\frac{a_{ell}}{a_{hip}}\right)^2 + \left(\frac{b_{ell}}{b_{hip}}\right)^2}} = \pm 3 \text{ cm} \cdot \frac{\left(\frac{5 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}\right)^2 - 1}{\sqrt{\left(\frac{5 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}\right)^2 + \left(\frac{3 \text{ cm}}{2 \text{ cm}}\right)^2}} = \pm 1,152331919 \text{ cm} ,$$

$$\underline{\underline{y_{1,2} = \pm 1,152331919 \text{ cm} .}} \quad (b)$$

Az (a) és (b) eredmények alapján a metszéspontok:

$$M_1 (4,616435357 \text{ cm} ; 1,152331919 \text{ cm}) , \quad (c / 1)$$

$$M_2 (4,616435357 \text{ cm} ; -1,152331919 \text{ cm}) , \quad (c / 2)$$

$$M_3 (-4,616435357 \text{ cm} ; 1,152331919 \text{ cm}) , \quad (c / 3)$$

$$M_4 (-4,616435357 \text{ cm} ; -1,152331919 \text{ cm}) . \quad (c / 4)$$

A (c) eredmények egyeznek az 1. ábra megfelelő adataival, melyeket a **Graph** rajzoló szoftver metszéspont - kereső szolgáltatásával kaptunk..

.....

Megjegyzések:

M1. A vizsgált ellipszis - és hiperbola - sokaságok nem csak közös centrummal, de egy - beeső főtengelyekkel is bírnak; azaz az ellipszis nagytengelye egybeesik a hiperbola valós tengelyével, az ellipszis kistengelye pedig egybeesik a hiperbola képzetes tengelyével. E tények könnyen leolvashatók az ábrákról.

M2. Az általános helyzetű ellipszis és hiperbola metszéspontjaival itt nem foglalkoztunk. Azt azért megemlítjük, hogy akkor leginkább grafikus úton határoznánk meg a metszés - pontok koordinátáit, elkerülendő a nehézkes, hosszú és könnyen eltéveszthető számításokat.

M3. Figyelemre méltó tény, hogy a (11) feltételben nem szerepelnek a b_{ell} és b_{hip} adatok.

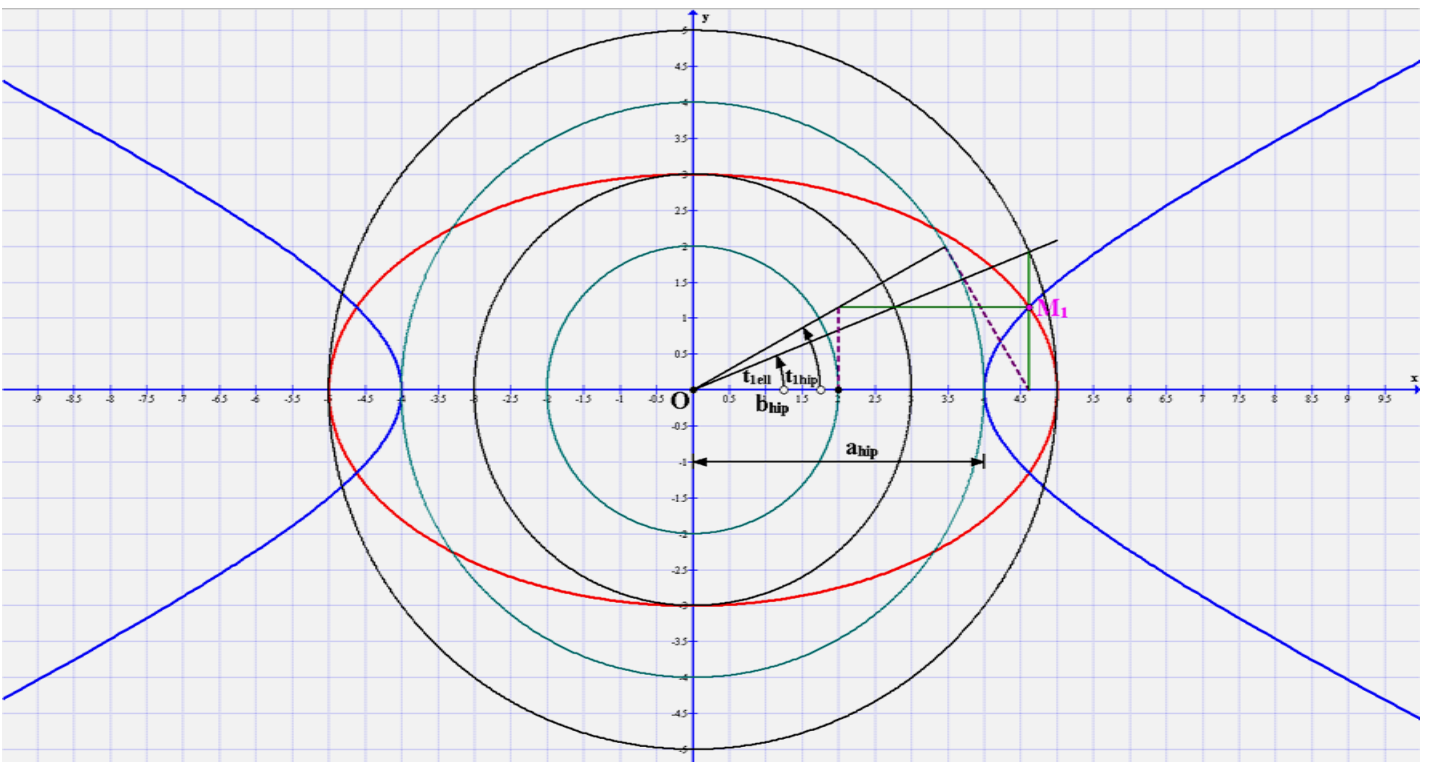
M4. Ábráinkon feltüntettük a hiperbolák

$$y_{asz} = \pm \frac{b}{a} \cdot x \quad (13)$$

egyenletű aszimptotáit is.

M5. Fenti feladatunk adja magát a középiskolai tananyag egy alkalmazásaként, így tanulmányozásuk középiskolásoknak is ajánlható. Szinte biztos, hogy egy adott ellipszis és egy adott hiperbola metszéspontjai meghatározásának feladata szerepelt tanulmányainkban, de nem paraméteres formában, ahogyan azt (8) és (10) adja.

M6. Kíváncsiak lettünk, hogy hogyan kellene megoldani feladatunkat az ellipszis és a hiperbola paraméteres egyenletrendszeri segítségével. Ehhez tekintsük a 4. ábrát!



4. ábra

Itt az ellipszis

$$x_{ell}(t) = a_{ell} \cdot \cos t, \quad y_{ell}(t) = b_{ell} \cdot \sin t, \quad 0^\circ \leq t_{ell} \leq 360^\circ; \quad (14)$$

valamint a hiperbola

$$x_{hip}(t) = \frac{a_{hip}}{\cos t}, \quad y_{hip}(t) = b_{hip} \cdot \operatorname{tg} t, \quad 0^\circ \leq t_{hip} \leq 360^\circ. \quad (15)$$

paraméteres egyenletrendszereivel, valamint az (A) adatokkal dolgoztunk. Minthogy az M_1 megoldás koordinátáiból az ismert módon – (c) mintájára – megkaphatjuk a többi megoldás / metszéspont koordinátáit, így elegendő lesz M_1 meghatározására szorítkozni. A 4. ábrán ismét megmutattuk az M_1 pont rajzi előállítását, (14) és (15) szerint. Fontos, hogy az M_1 - hez tartozó $t_{1,ell} \neq t_{1,hip}$. Utóbbiak – vagy valamelyikük – meghatározása a közvetlen feladat, mert ismeretében x_1 és y_1 már számítható (14) vagy (15) -ből.

A számítást az alábbiakban részletezzük.

Az M_1 metszéspont meghatározásának 2 feltétele:

$$x_{ell,1} = x_{hip,1}; \quad y_{ell,1} = y_{hip,1}. \quad (16)$$

Most (14 / 1), (15 / 1) és (16 / 1) szerint:

$$a_{ell} \cdot \cos t_{1,ell} = \frac{a_{hip}}{\cos t_{1,hip}} \rightarrow \cos t_{1,ell} = \frac{a_{hip}}{a_{ell}} \cdot \frac{1}{\cos t_{1,hip}}; \quad (17 / 1)$$

majd (14 / 2), (15 / 2) és (16 / 2) szerint:

$$b_{ell} \cdot \sin t_{1,ell} = b_{hip} \cdot \operatorname{tg} t_{1,hip} \rightarrow \sin t_{1,ell} = \frac{b_{hip}}{b_{ell}} \cdot \operatorname{tg} t_{1,hip}. \quad (17 / 2)$$

A (17) egyenletek négyzetösszegével:

$$\cos^2 t_{1,ell} + \sin^2 t_{1,ell} = 1 = \left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 t_{1,hip}} + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}} \right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 t_{1,hip} \rightarrow$$

$$\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 t_{1,hip}} + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}} \right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 t_{1,hip} = 1 \rightarrow$$

$$\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}} \right)^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 t_{1,hip}) + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}} \right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 t_{1,hip} = 1 \rightarrow$$

$$\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}} \right)^2 + \left[\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}} \right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}} \right)^2 \right] \cdot \operatorname{tg}^2 t_{1,hip} = 1 \rightarrow$$

$$\left[\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}} \right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}} \right)^2 \right] \cdot \operatorname{tg}^2 t_{1,hip} = 1 - \left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}} \right)^2 \rightarrow$$

$$\operatorname{tg}^2 t_{1,hip} = \frac{1 - \left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}} \right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}} \right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}} \right)^2} \rightarrow \operatorname{tg} t_{1,hip} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}} \right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}} \right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}} \right)^2}}. \quad (18)$$

Most (17 / 1) és (18) - cal is:

$$\cos t_{1,ell} = \frac{a_{hip}}{a_{ell}} \cdot \frac{1}{\cos t_{1,hip}} = \frac{a_{hip}}{a_{ell}} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t_{1,hip}} ; \quad (19)$$

részletszámításokkal:

$$1 + \operatorname{tg}^2 t_{1,hip} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2} = \frac{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2 + 1 - \left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2} = \frac{\left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2 + 1}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2} , \text{ tehát:}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 t_{1,hip} = \frac{1 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2} . \quad (20)$$

Majd (19) és (20) szerint:

$$\cos t_{1,ell} = \frac{a_{hip}}{a_{ell}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}} . \quad (21)$$

Majd a fentiek szerint:

$$x_1 = a_{ell} \cdot \cos t_{1,ell} = a_{ell} \cdot \frac{a_{hip}}{a_{ell}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}} = a_{hip} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}} ,$$

tehát:

$$x_1 = a_{hip} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}} . \quad (22)$$

Továbbá a fentiekkel:

$$y_1 = b_{hip} \cdot \operatorname{tg} t_{1,hip} = b_{hip} \cdot \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}} ,$$

tehát:

$$y_1 = b_{hip} \cdot \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}} . \quad (23)$$

SZÁMPÉLDA – 4. ábra

Most (A), (22) és (23) szerint:

$$x_1 = a_{hip} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}} = 4 \text{ cm} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}}\right)^2}{\left(\frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}\right)^2 + \left(\frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}}\right)^2}} = 4,616435357 \text{ cm} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 4,616435357 \text{ cm} .}} \quad (d)$$

$$y_1 = b_{hip} \cdot \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2}{\left(\frac{a_{hip}}{a_{ell}}\right)^2 + \left(\frac{b_{hip}}{b_{ell}}\right)^2}} = 2 \text{ cm} \cdot \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}\right)^2}{\left(\frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}\right)^2 + \left(\frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}}\right)^2}} = 1,152331919 \text{ cm} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{y_1 = 1,152331919 \text{ cm} .}} \quad (e)$$

A (d) és (e) eredmények megegyeznek az (a1) és (b1) eredményekkel, így a teljes megoldás (c) lesz. Ezzel megmutattuk, hogyan oldható meg feladatunk a paraméteres egyenletrendszerekkel dolgozva. Utóbbi lényeges mozzanata, hogy elkerültük a t_{hip} - paraméter nem hegyesszögű értékeit; ugyanis ott a hiperbola – mondhatni – „furcsán viselkedik”. Utóbbi végiggondolását rábízuk az érdeklődő Olvasóra.

M7. A hiperbola (15) paraméteres egyenletrendszerével továbbra is csak ritkán találkozunk. Főként használatban, mint itt is. E témában hasznos lehet *) és **).

M8. A (8) és (10), valamint a (22) és (23) képletek az (A) adatokkal pontosan egy - forma eredményre vezettek, alaki eltérésük ellenére. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó mutassa ki a megfelelő képletek azonosságát!

M9. Már felhívtuk a figyelmet, hogy $t_{1,ell} \neq t_{1,hip}$, általában. A fenti számpélda esetében (18) és (A) - val, valamint (17 / 2) és (A) - val:

$$t_{1,hip} \cong 29,95^\circ , \quad t_{1,ell} \cong 22,59^\circ . \quad (f)$$

Az (f) eredmények megegyeznek a **Graph** által kijelzett megfelelő adatokkal.

Ehhez ld. a 4. ábrát is! Javasolható elmélázni azon körülmény felett, hogy vajon nyilván - való - e a $t_{1,ell} \neq t_{1,hip}$ viszonylat! Ugyanis az erre való nem ügyelés lehet a fő hibaforrása egyes elrontott számításoknak. Ezt a hibát mi a 4. ábra megrajzolásával kerültük el.

Tanulság: rajzoljunk ábrát, főleg a problémásabb esetekben!

Ajánlott olvasmányok:

*)

<https://galgoczi.net/anyagok/Az%20ellipszis%20es%20a%20hiperbola%20parameteres%20egyenletrendszerrol.pdf>

**)

<https://galgoczi.net/anyagok/Az%20ellipszis%20es%20a%20hiperbola%20erintojerol.pdf>

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2022. 09. 08.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>